Уравнения сферической и плоской волн

1) Сферическая волна

Сферическая продольная волна одномерна: ее волновая поверхность – сфера, поэтому смещение ξ зависит только от одной координаты r:

$$\xi = \xi(r, t) \tag{1}$$

Решение волнового уравнения для одномерной упругой волны имеет вид:

$$\xi(x, t) = a\cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi) \tag{2}$$

Если энергия волны не поглащается средой, то $a = const$, равная амплитуде на единичном расстоянии от источника волны. В случае сферического распространения, энергия волны с увеличением r приходится на все большую волновую поверхность. Таким образом, в уравнение сферической волны вносится поправка:

$$\xi(r, t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi) \tag{3}$$

(Причина появления коэффициента $\frac{1}{r}$ в том, что в выражении для энергии волны, которая должна быть постоянной при отсутствии поглащения средой, амплитуда и радиус стоят во второй степени: $a^2r^2 = const$. См. энергия упругих волн)

2) Плоская волна

Пусть колебания в плоскости, проходящей через начало координат, имеют вид:

$$\xi_0 = a\cos(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

Рассмотрим волновую поверхность (плоскость), отстоящую от данной на расстояние l. Колебания в этой плоскости будут отставать на время $\tau = \frac{l}{v}$:

$$\xi_l = \xi = a\cos(\omega(t - \frac{l}{v}) + \varphi) = a\cos(\omega t - kl + \varphi) \tag{5}$$

Выразим l через радиус-вектор $\vec{r}$ – тогда мы сможем найти колебания волны в любой точке пространства:

$$(\vec{n}; \vec{r}) = l \tag{6}$$

$\vec{n}$ – нормаль, соответствующая направлению распространения волны. Отсюда:

$$\xi = a\cos(\omega t - (k\vec{n}; \vec{r}) + \varphi) \tag{7}$$

Введем вектор $\vec{k} = k\vec{n}$ (он называется волновым вектором). Таким образом, уравнение представимо в виде:

$$\xi = a\cos(\omega t - (\vec{k}; \vec{r}) + \varphi) \tag{8}$$

Можно разложить скалярное произведение $(\vec{k}; \vec{r})$ по координатам и получить:

$$\xi(x, y, z, t) = a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi) \tag{9}$$

Поскольку $(\vec{k}; \vec{r}) = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{n}; \vec{r})$:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma \tag{10}$$

α, β, γ – углы, между направлением распространения волны и осями x, y, z соответственно.